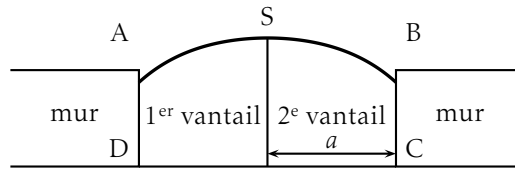


EXERCICE 1

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leq 2$.

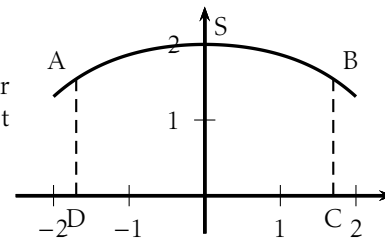
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés $[AD]$ et $[BC]$ sont perpendiculaires au seuil $[CD]$ du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.



Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2 ; 2]$ par :

$$f(x) = -\frac{b}{8} \left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}} \right) + \frac{9}{4} \quad \text{où } b > 0.$$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a ; f(-a))$, $(a ; f(a))$, $(a ; 0)$ et $(-a ; 0)$ et on note S le sommet de la courbe de f , comme illustré ci-contre.

**Partie A**

- Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2 ; 2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?
- On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f . Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2 ; 2]$:

$$f'(x) = -\frac{1}{8} \left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}} \right).$$

- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b .

Partie B

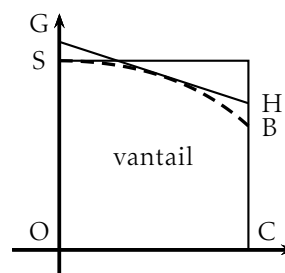
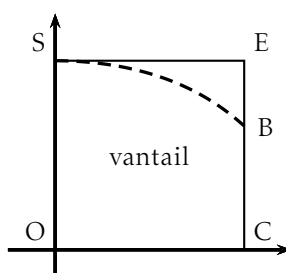
La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b .

- Justifier que $b = 1$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0 ; 2]$ et en déduire une valeur approchée de a au centième.
- Dans cette question, on choisit $a = 1,8$ et $b = 1$. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à 20 kg.m^{-2} . Que décide le client ?

Partie C

On conserve les valeurs $a = 1,8$ et $b = 1$.

Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle OCES, soit un trapèze OCHG comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1.



Forme 1 : découpe dans un rectangle Forme 2 : découpe dans un trapèze

La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique.

Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.

On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant b et B respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et h la hauteur du trapèze :

$$\text{Aire} = \frac{b+B}{2} \times h.$$

EXERCICE 2

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en m.s^{-1} , de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi :

Pour tout réel positif ou nul t , $v(t) = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$; la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Cas général

1. Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.
2. La goutte ralentit-elle au cours de sa chute ?
3. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81 \frac{m}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.
4. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\frac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?

Partie B

Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3,9$.

A un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-1} .

1. Depuis combien de temps la goutte s'est-elle détachée de son nuage ? Arrondir la réponse au dixième de seconde.
2. En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de m.s^{-1} .