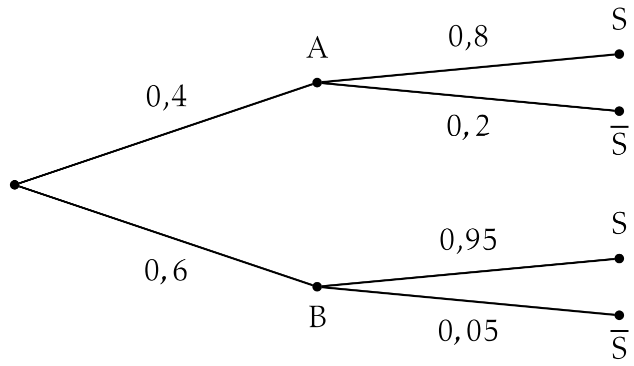
Exercice 1 (5 pts)

Partie A

1. Arbre pondéré :



$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) = 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,95 = 0,89$

2. $P_S(A) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,4 \times 0,8}{0,89} \approx 0,36$

Partie B

1. a. $P(T \leqslant a)$ représente l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$

   b. Une primitive de $f(x)$ est $F(x) = -e^{-\lambda x}$

   $P(T \leqslant a) = F(t) - F(0) = -e^{-\lambda t} + 1 = 1 - e^{-\lambda t}$

   c. $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$

2. $P(T \leqslant 7) = 0,5$

   $1 - e^{-7\lambda} = 0,5$

   $e^{-7\lambda} = 0,5$

   $-7\lambda = \ln 0,5$

   $\lambda = \dfrac{-\ln 0,5}{7} \approx 0,099$

3. a. $P(T \geqslant 5) = e^{-5\lambda} \approx 0,61$

   b. $P_{T \geqslant 2}(T \geqslant 7) = P(T \geqslant 5) \approx 0,61$ (loi sans vieillissement)

   c. $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} \approx 10$

   La durée de vie moyenne d'un composant est de 10 ans

Exercice 2 (5 pts)

Proposition 1 $\boxed{\text{VRAIE}}$
Soit B le point d'affixe $b = 4$, C le point d'affixe $c = -2i$ et M le point d'affixe z

$|z-4| = |z+2i|$

soit MB = MC

Donc l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2i|$ est la médiatrice du segment [BC]

Vérifions si A appartient à cette médiatrice :

$AB = |b-a| = |4-3i| = \sqrt{16+9} = 5$

$AC = |c-a| = |-2i-3i| = |-5i| = 5$

AB = AC donc A appartient à la médiatrice de [BC]

L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2i|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe $3i$.

Proposition 2 $\boxed{\text{VRAIE}}$
(E) : $(z-1)(z^2-8z+25) = 0$

$z-1 = 0$ soit $z = 1$

ou $z^2-8z+25 = 0 \quad \Delta = -36 \; z_1 = 4+3i$ et $z_2 = 4-3i$

Soit A, B, C les points d'affixes respectives 1 ; $4+3i$ et $4-3i$

$AB = |b-a| = |4+3i-1| = |3+3i| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$AC = |c-a| = |4-3i-1| = |3-3i| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$BC = |c-b| = |4-3i-4-3i| = |-6i| = 6$

Comme $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A

Proposition 3 $\boxed{\text{FAUSSE}}$
Soit $z = -\sqrt{3}+i$, on cherche un argument de z.

$|z| = \sqrt{3+1} = 2$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$ donc $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$\arg[(-\sqrt{3}+i)^8] = 8 \times \frac{5\pi}{6} = \frac{20\pi}{3}$

$\frac{20\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ ne représentent pas le même angle

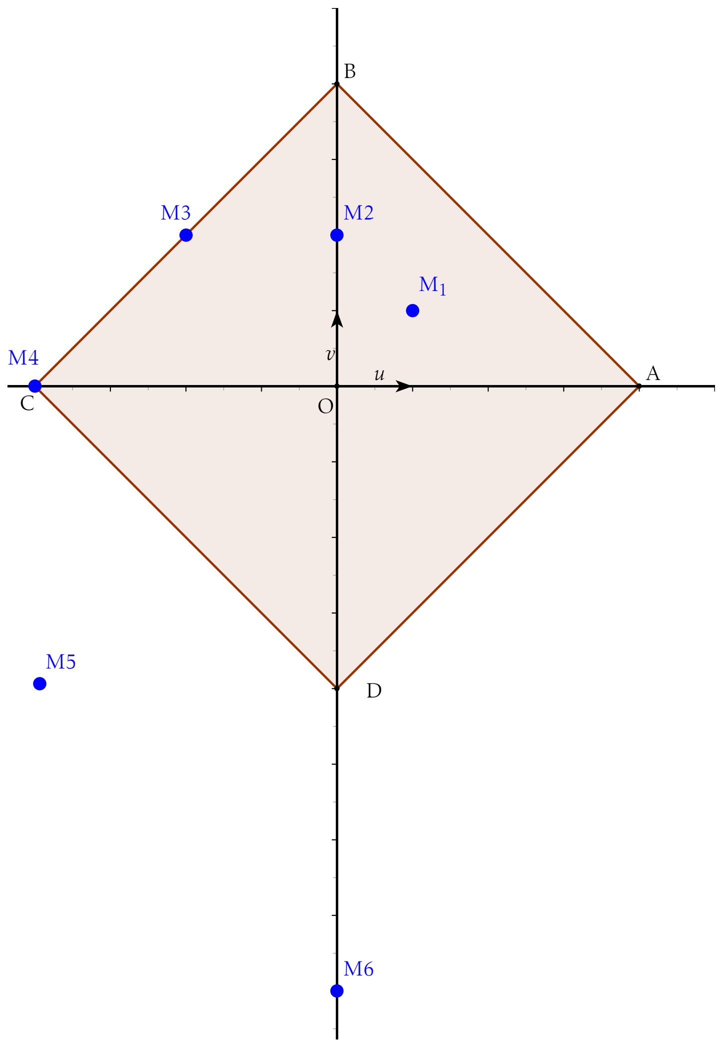
Question 4

1. $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

   $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

   $1 + i = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$

2. Figure



La distance maximale entre O et un point quelconque d'un côté du carré est 4.

Un point M_n sort du carré si $OM_n > 4$

or $OM_n = |z_n| = \left(\sqrt{2}\right)^n$
On résout l'inéquation $OM_n > 4$

$\left(\sqrt{2}\right)^n > 4$

$n \ln\sqrt{2} > \ln 4$

$n > \dfrac{\ln 4}{\ln\sqrt{2}} = 4$

Donc $n_0 = 5$

Exercice 3 (5 pts)

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. a. D'un jour à l'autre, la masse des bactéries augmente de 20 % donc elle est multipliée par 1,2. De plus on perd 100 g de bactéries donc $u_{n+1} = 1,2u_n - 100$.

   Initialement il y a 1 kg de bactéries donc $u_0 = 1\,000$

   b. On cherche n tel que $u_n > 30000$

   Avec le tableur on trouve 23 jours

   c. Algorithme

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1 000 n prend la valeur 0 Tant que $u \leqslant 30000$ faire u prend la valeur $1,2u - 100$ n prend la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher n

2. a. — initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1000$ donc la propriété est vraie au rang 0.

   — hérédité : supposons que la propriété soit vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang n+1.

   On a : $u_n \geqslant 1000$
   soit $1,2u_n \geqslant 1200$
   soit $1,2u_n - 100 \geqslant 1100 > 1000$
   Donc la propriété est vraie au rang n+1.

   — conclusion : la propriété a été initialisée et est héréditaire donc pour tout entier naturel n,$u_n \geqslant 1\,000$

   b. $u_{n+1} - u_n = 1,2u_n - 100 - u_n = 0,2u_n - 100$

   Or $u_n \geqslant 1\,000$

   $0,2u_n \geqslant 200$

   $0,2u_n - 100 \geqslant 100 > 0$

   On a $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2u_n - 100 - 500 = 1,2u_n - 600 = 1,2(u_n - 500) = 1,2v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 500 = 500$

b. $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n$

$u_n = v_n + 500 = 500 \times 1,2^n + 500$

c. Comme $1,2 > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Partie B : second modèle – avec une fonction

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,2t}}$$

1. a. $f(0) = \dfrac{50}{1+49} = 1$

b. Comme $\mathrm{e}^{-0,2t} > 0$ alors $1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,2t} > 1$ et donc $f(t) < 50$

c. $f'(t) = \dfrac{0 \times (1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,2t}) - 49 \times (-0,2)\,\mathrm{e}^{-0,2t} \times 50}{(1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,2t})^2} = \dfrac{490\,\mathrm{e}^{-0,2t}}{(1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,2t})^2}$

Le numérateur et le dénominateur de cette fraction sont positifs donc $f'(t) > 0$ et f est croissante sur $[0\,;+\infty[$

d. $\lim\limits_{t \to +\infty} 49\,\mathrm{e}^{-0,2t} = \lim\limits_{\mathrm{X} \to -\infty} 49\,\mathrm{e}^{\mathrm{X}} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 50$

2.
- $f(0) = 1$ signifie que la masse de bactéries à $t = 0$ est de 1 kg
- $f(t) < 50$ signifie que la masse des batéries est toujours inférieure à 50 kg
- f est croissante signifie que la masse de bactéries ne cesse d'augmenter au fil du temps
- $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 50$ signifie que la masse de bactéries va se rapprocher de 50 kg

3. $f(t) > 30$

$\dfrac{50}{1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,2t}} > 30$

$50 > 30(1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,2t})$

$50 > 30 + 1470\,\mathrm{e}^{-0,2t}$

$\mathrm{e}^{-0,2t} < \dfrac{20}{1470}$

$-0,2t < \ln\left(\dfrac{20}{1470}\right)$

$t > \dfrac{\ln\left(\frac{20}{1470}\right)}{-0,2} \approx 21,5$

la masse de bactéries dépassera 30kg au bout de 22 jours

EXERCICE 4 (5 pts)

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

$$v_1(t) = 5 \times \frac{e^{0,3t} - 1}{e^{0,3t} + 1}.$$

1. $v_1(t) = 5 \times \dfrac{e^{0,3t} -1}{e^{0,3t} +1}$

   $v_1(t)' = 5\times\dfrac{0,3\,e^{0,3t}(e^{0,3t}+1) - 0,3\,e^{0,3t}(e^{0,3t}-1)}{(e^{0,3t}+1)^2} = 5\times\dfrac{0,3\,e^{0,6t}+0,3\,e^{0,3t}-0,3\,e^{0,6t}+0,3\,e^{0,3t}}{(e^{0,3t}+1)^2} = \dfrac{5\times 0,6\,e^{0,3t}}{(e^{0,3t}+1)^2} = \dfrac{3\,e^{0,3t}}{(e^{0,3t}+1)^2}$

   Le numérateur et le dénominateur sont positifs donc $v_1(t)' > 0$ et la fonction v_1 est croissante sur $[0\,;+\infty[$

2. On résout l'inéquation $v_1(t) \leqslant 6$

   $5 \times \dfrac{e^{0,3t}-1}{e^{0,3t}+1} \leqslant 6$

   $\dfrac{5\,e^{0,3t}-5-6\,e^{0,3t}-6}{e^{0,3t}+1} \leqslant 0$

   $\dfrac{-e^{0,3t}-11}{e^{0,3t}+1} \leqslant 0$

   Le numérateur est négatif (somme de 2 termes négatifs) et le dénominateur est positif donc l'inéquation est toujours vérifiée

   Le colis ne risque pas d'être endommagé

Partie 2

$v_2(t) = 32,7\left(1 - e^{-0,3t}\right)$

1. $v_2(10) = 32,7(1-e^{-3}) \approx 31,1$ soit $31,1 m.s^{-1}$

2. $v_2(t) = 30$

   $32,7 - 32,7e^{-0,3t} = 30$

   $-32,7e^{-0,3t} = -2,7$

   $e^{-0,3t} = \dfrac{2,7}{32,7}$

   $-0,3t = \ln(\frac{2,7}{32,7})$

$t = \dfrac{-\ln(\frac{2,7}{32,7})}{0,3} \approx 8,3$

Au bout de 8,3 s le colis atteint une vitesse de $30m.s^{-1}$

3. $d(\mathrm{T}) = \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} v_2(t)\,\mathrm{d}t$

   a. Une primitive est $\mathrm{F}(t) = 32,7t + 109e^{-0,3t}$

   $d(\mathrm{T}) = \mathrm{F}(\mathrm{T}) - \mathrm{F}(0) = 32,7\mathrm{T} + 109e^{-0,3\mathrm{T}} - 109 = 109(e^{-0,3\mathrm{T}} + 0,3\mathrm{T} - 1)$

   b. Le colis atteint le sol au bout de 20 s

   $d(20) = 109(\mathrm{e}^{-6} + 6 - 1) \approx 545$ m

4. On cherche T tel que $d(\mathrm{T}) = 700$
   Etudions les variations de la fonction d sur $[0\,;+\infty[$

   $d'(\mathrm{T}) = 109(-0,3e^{-0,3\mathrm{T}} + 0,3) = -32,7e^{-0,3\mathrm{T}} + 32,7$

   $d'(\mathrm{T}) > 0$ lorsque $-32,7e^{-0,3\mathrm{T}} + 32,7 > 0$

   $-32,7e^{-0,3\mathrm{T}} > -32,7$

   $e^{-0,3\mathrm{T}} < 1$

   $-0,3\mathrm{T} < 0$

   $\mathrm{T} > 0$

   limite en $+\infty$

   $\lim\limits_{\mathrm{T}\to+\infty} e^{-0,3\mathrm{T}} = \lim\limits_{\mathrm{X}\to-\infty} e^{\mathrm{X}} = 0$

   $\lim\limits_{\mathrm{T}\to+\infty} 0,3\mathrm{T} - 1 = +\infty$

   donc $\lim\limits_{\mathrm{T}\to+\infty} d(\mathrm{T}) = +\infty$

T	0 $+\infty$
$d'(\mathrm{T})$	+
d	0 $\nearrow$ $+\infty$

   d est continue et strictement croissante. De plus $700 \in [0\,;+\infty\,[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $d(\mathrm{T}) = 700$ admet une seule solution.

   Avec la calculatrice on obtient $24,7 < \mathrm{T} < 24,8$

Exercice 5 (5 pts)

Partie A

On considère les matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres entiers.

Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de M. On le note det(M).
Ainsi $\det(M) = 3a - 5b$.

1. $MN = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3a-5b} \begin{pmatrix} 3a-5b & -ab+ab \\ 15-15 & -5b+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
   Donc N est l'inverse de M

2. On considère l'équation (E) : $\det(M) = 3$.
   On souhaite déterminer tous les couples d'entiers $(a\ ;\ b)$ solutions de l'équation (E).
   a. $3 \times 6 - 5 \times 3 = 18 - 15 = 3$ donc le couple $(6\ ;\ 3)$ est une solution de (E)

   b. $3a - 5b = 3 \times 6 - 5 \times 3$

      $3(a-6) = 5(b-3)$

      3 divise $5(b-3)$. Or 3 et 5 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $b-3$.

      Il existe un réel k tel que $b - 3 = 3k$ soit $b = 3k + 3$

      donc $3(a-6) = 5 \times 3k$

      $a - 6 = 5k$

      $a = 5k + 6$

      Les solutions de (E) sont les couples $(5k + 6\ ,\ 3k + 3\ )$ k entier

      Réciproquement on vérifie que ces couples sont solutions

      $3(5k+6) - 5(3k+3) = 1$

      (E) a pour solution les couples $(5k + 6\ ,\ 3k + 3\ )$ k entier

Partie B

1. $\det(Q) = 6 \times 3 - 5 \times 3 = 18 - 15 = 3 \neq 0$ donc la matrice Q admet pour inverse la matrice
   $Q^{-1} = \dfrac{1}{\det(Q)} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.
2. $DO \to X = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 3 + 3 \times 14 \\ 5 \times 3 + 3 \times 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 57 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \to IF$
3. a. $Y = QX$

      $3Q^{-1}Y = 3Q^{-1}QX$

$3Q^{-1}Y = 3X$

$3X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1 - 3y_2 \\ -5y_1 + 6y_2 \end{pmatrix}$

soit $3x_1 = 3y_1 - 3y_2$ et donc $3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 \pmod{26}$

et soit $3x_2 = -5y_1 + 6y_2$ et donc $3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 \pmod{26}$

b. $3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 \pmod{26}$

$9 \times 3x_1 \equiv 9 \times 3r_1 - 9 \times 3r_2 \pmod{26}$

or $9 \times 3 \equiv 1 \pmod{26}$

donc $x_1 \equiv r_1 - r_2 \pmod{26}$

de même $3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 \pmod{26}$

$9 \times 3x_2 \equiv -9 \times 5r_1 + 9 \times 6r_2 \pmod{26}$

or $-45 \equiv 7 \pmod{26}$ et $54 \equiv 2 \pmod{26}$

donc $x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \pmod{26}$

c. $SG \to R = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$

$x_1 \equiv 18 - 6 \equiv 12 \pmod{26}$

$x_2 \equiv 7 \times 18 + 2 \times 6 \equiv 138 \equiv 8 \pmod{26}$

SG est décodé en MI