

BACCALAUREAT BLANC

SESSION 2017

MATHEMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 7

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit
traiter tous les exercices. La qualité et la précision de la rédaction
seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages.

EXERCICE 1 (5 pts)

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.

L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.

Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1 , sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2 .

On considère les évènements suivants :

A : « obtenir 1 en lançant le dé »

B : « obtenir une boule noire ».

1. a. Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.
b. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.
c. Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.
2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
 - a. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.
 - b. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.
 - c. On donne le tableau suivant:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,0091	0,0637	0,2110	0,4467	0,6943	0,8725	0,9616	0,9922	0,9990	0,9999

Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : « la personne gagne au moins N parties ».

À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évènement est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

EXERCICE 2 (5 pts)

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 0,9u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

- Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
- On admet que, pour tout entier naturel n , u_n et $1 - u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0 ; 1]$.
 - Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$.
 - Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$.
 - Déterminer la limite de la suite (u_n) . Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?
- Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.

On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.

Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

Variabes :	u est un réel n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur 0,3 n prend la valeur 0 Tant que ... faire :
	 Fin Tant que
Sortie :	Afficher ...

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} = 0,032 \\ v_{n+1} = 1,06v_n(1 - v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n \geq 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

- Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
- On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. On admet que ℓ vérifie :

$$\ell = 1,06\ell(1 - \ell).$$

La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

EXERCICE 3 (5 pts)

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - e^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note \mathcal{D} l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse a et tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point B d'abscisse b .

1.
 - a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A.
 - b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point B.
 - c. En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation

$$2(x - 1)e^x + 1 = 0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} par

$$\varphi(x) = 2(x - 1)e^x + 1.$$

1.
 - a. Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
 - b. Calculer la dérivée de la fonction φ , puis étudier son signe.
 - c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur \mathbb{R} . Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2.
 - a. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans \mathbb{R} .
 - b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

EXERCICE 4 (5 pts)

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n , le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n , on observe qu'en semaine $n + 1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n , on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n + 1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :

S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;

M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;

I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

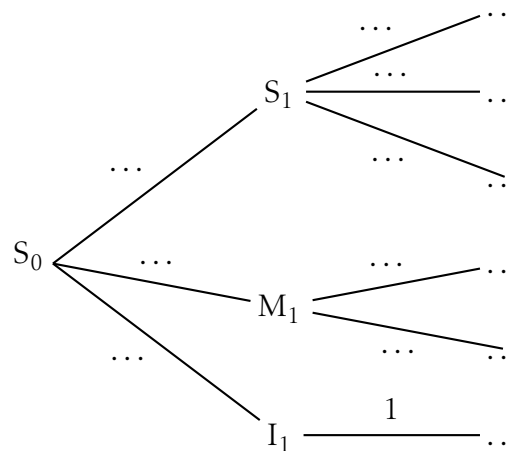
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 ; P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0,2025$.
3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel n , on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n , M_n et I_n .

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.

2. a. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.

En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n ,

$$v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n).$$

3. Calculer les limites de chacune des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

ANNEXE A RENDRE

