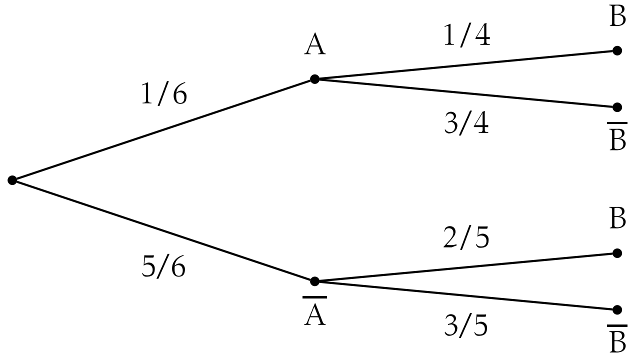
Exercice 1 (5 pts)

1. a. Arbre pondéré :



b. $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{24} + \frac{8}{24} = \frac{3}{8}$

c. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{9}$

2. a. Les parties étant indépendantes la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{8}$

$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{5}{8}\right)^7 \approx 0,236$

b. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times \left(\frac{3}{8}\right)^0 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{10} \approx 0,991$

c. $P(X \geqslant N) < 0,1$

$1 - P(X < N) < 0,1$

$-P(X < N) < -0,9$

$P(X < N) > 0,9$

D'après le tableau N = 7

Exercice 2 (5 pts)

Partie A

1. $u_1 = 0,9u_0(1 - u_0) = 0,9 \times 0,3 \times (1 - 0,3) = 0,189$; le nombre de tortues en 2001 est 189

$u_2 = 0,9u_1(1 - u_1) = 0,9 \times 0,189 \times (1 - 0,189) \approx 0,138$; le nombre de tortues en 2001 est 138

2. a. On sait que $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$

$0 \leqslant u_n(1 - u_n) \leqslant u_n \quad (u_n$ est positif)

$0 \leqslant 0,9u_n(1 - u_n) \leqslant 0,9u_n$

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$

b. Montrons le par récurrence :

— initialisation : pour $n = 0$: $u_0 = 0,3$ et $0,3 \times 0,9^0 = 0,3$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 0,3 \times 0,9^0$

la propriété est vraie au rang 0.

— hérédité : supposons que la propriété soit vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang n+1.

D'après la question précédente $u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$

D'après l'hypothèse de récurrence $u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$

On en déduit que $u_{n+1} \leqslant 0,9 \times 0,3 \times 0,9^n$

soit $u_{n+1} \leqslant 0,3 \times 0,9^{n+1}$
Donc la propriété est vraie au rang n+1.

— conclusion : la propriété a été initialisée et est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$

c. Comme $-1 < 0,9 < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3 \times 0,9^n = 0$
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Ce qui signifie que la population de tortues est en voie d'extinction

3. Algorithme

Variables :	u est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur $0,3$
	n prend la valeur 0
	Tant que $u \geqslant 0,03$ faire :
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0,9u(1-u)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $2000+(n-1)$

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_{10} & = & 0,032 \\ v_{n+1} & = & 1,06v_n(1-v_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. $v_{11} = 1,06v_{10}(1-v_{10}) = 1,06 \times 0,032(1-0,032) \approx 0,033$ il y aura donc 33 tortues en 2011

$v_{12} = 1,06v_{11}(1-v_{11}) = 1,06 \times 0,033(1-0,033) \approx 0,034$ il y aura donc 34 tortues en 2012

2. La suite (v_n) est croissante et $v_{10} = 0,032$

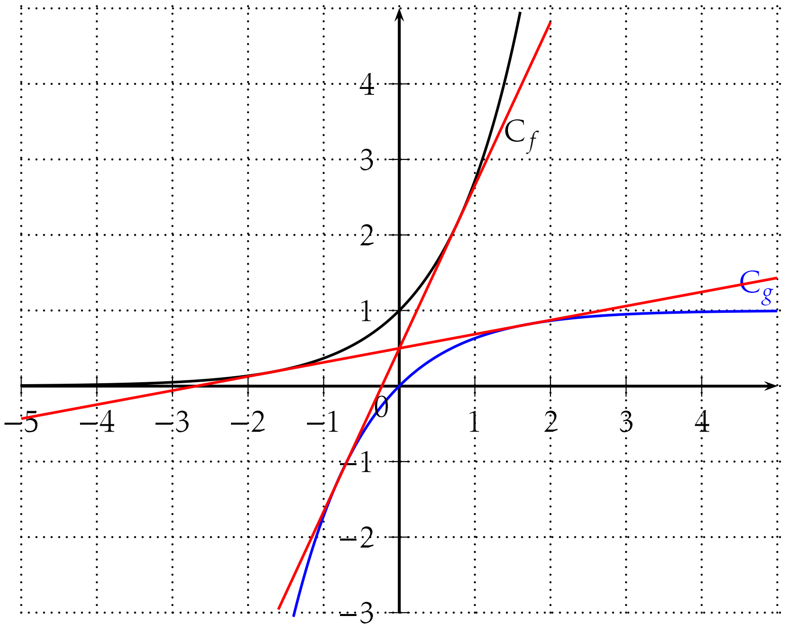
Donc, pour tout $n \geqslant 10$, $v_n \geqslant v_0$ autrement dit $v_n \geqslant 0,032$

Il y aura donc au moins 32 tortues pour toute année au delà de 2010, donc cette population de tortues n'est plus en voie d'extinction

Exercice 3 (5 pts)

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :
$f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan notées respectivement C_f et C_g sont fournies ci-dessous.

Partie A



Partie B

On note d l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à C_f au point A d'abscisse a et tangente à C_g au point B d'abscisse b.

1. a. $f'(a) = \mathrm{e}^a$

   b. $g'(b) = -(-\mathrm{e}^{-b}) = \mathrm{e}^{-b}$

   c. Ces deux coefficients directeurs sont égaux

   donc $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{-b}$ soit $a = -b$ soit $b = -a$

2. Equation de la tangente au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x-a) + f(a) = \mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a$

   Equation de la tangente au point d'abscisse b : $y = g'(b)(x-b) + g(b) = \mathrm{e}^{-b}(x-b) + 1 - \mathrm{e}^{-b}$

Or $b = -a$ donc $y = \mathrm{e}^a(x+a) + 1 - \mathrm{e}^a$

Il s'agit de la même tangente donc :

$\mathrm{e}^a(x+a) + 1 - \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a$

$x\,\mathrm{e}^a + a\,\mathrm{e}^a + 1 - \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^a + a\,\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^a = 0$

$2a\,\mathrm{e}^a - 2\,\mathrm{e}^a + 1 = 0$

$2\,\mathrm{e}^a(a-1) + 1 = 0$

Donc a est solution de l'équation : $2(x-1)\,\mathrm{e}^x + 1 = 0$

Partie C

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2(x-1)\,\mathrm{e}^x + 1$.

1. a. • en $-\infty$: FI

   $h(x) = 2x\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + 1$

   $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x\,\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 1$

   • en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} 2(x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

   b. $h'(x) = 2\,\mathrm{e}^x + 2(x-1)\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(2 + 2x - 2) = 2x\,\mathrm{e}^x$

   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ alors $h'(x)$ est du signe de $2x$ (fct affine)

   $h'(x)$ est négative sur $]-\infty\,;\,0]$ et positive sur $[0;\,+\infty[$

   c. Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. a. Sur $]-\infty\,;\,0]$ la fonction h est continue, strictement décroissante. De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 1$ et $h(0) = -1 < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution.

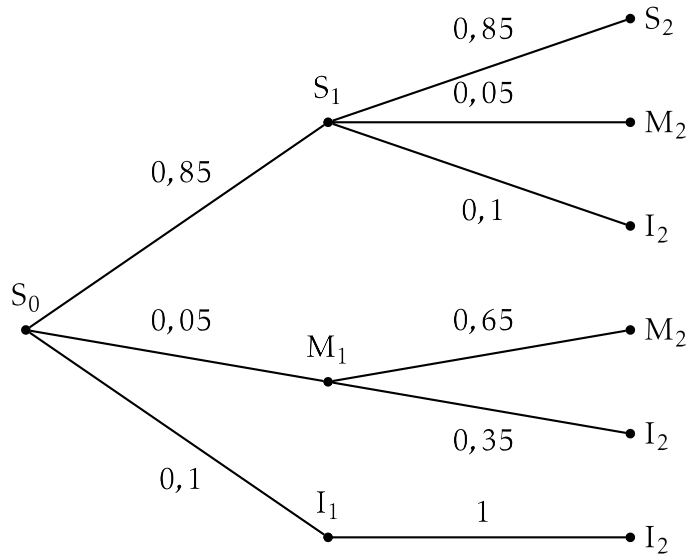
   Même principe sur $[0;\,+\infty[$

   b. La calculatrice donne $\alpha \approx -1,68$ et $\beta \approx 0,77$

Exercice 4 (5 pts)

PARTIE A

1. Arbre de probabilités :



2. $P(I_2) = P(I_2 \cap S_1) + P(I_2 \cap M_1) + P(I_2 \cap I_1) = 0,1 \times 0,85 + 0,35 \times 0,05 + 1 \times 0,1 = 0,2025$

3. $P_{I_2}(M_1) = \dfrac{P(M_1 \cap I_2)}{P(I_2)} = \dfrac{0,05 \times 0,35}{0,2025} = \dfrac{0,00175}{0,2025} \approx 0,086$

PARTIE B

1. Chaque semaine, l'individu est soit de type S, soit malade ou soit immunisé

   Donc $P(S_n) + P(M_n) + P(I_n) = 1$

   Soit $u_n + v_n + w_n = 1$

2. a. D'après l'énoncé, parmi les individus de type S en semaine n on observe, qu'en semaine n+1, 85% restent de type S donc $u_{n+1} = 0,85u_n$

   La suite (u_n) est donc géométrique de raison 0,85 et de premier terme $u_0 = 1$

   $u_n = u_0 q^n = 0,85^n$

   b. — initialisation : pour $n = 0$: $v_0 = 0$ et $\dfrac{1}{4}(0,85^0 - 0,65^0) = 0$

   la propriété est vraie au rang 0.

   — hérédité : supposons que la propriété soit vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang n+1.

   $v_{n+1} = 0,05u_n + 0,65v_n = 0,05 \times 0,85^n + 0,65 \times \dfrac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$
   $= \left(0,05 + \dfrac{0,65}{4}\right) \times 0,85^n - \dfrac{1}{4} \times 0,65^{n+1} = \dfrac{0,85}{4} \times 0,85^n - \dfrac{0,65^{n+1}}{4} = \dfrac{1}{4}\left(0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}\right)$

   Donc la propriété est vraie au rang n+1.

— conclusion : la propriété a été initialisée et est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$

3. $-1 < 0,65 < 1$ et $-1 < 0,85 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,85^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,65^n = 0$

   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

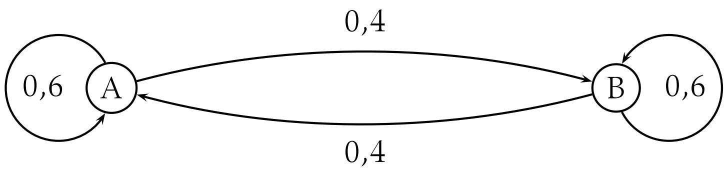
   Comme $u_n + v_n + w_n = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$

   Cela signifie donc que à long terme tous les individus seront immunisés

Exercice 5 (5 pts)

Partie A

1. graphe probabiliste



2. $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

3. $U_{n+1} = U_n M$

4. Par récurrence :

   — initialisation : pour $n = 0$, $U_0 = \begin{pmatrix} 150 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^0 & 75 - 75 \times 0,2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 & 0 \end{pmatrix}$

   donc la propriété est vraie au rang 0

   — hérédité : supposons que la propriété soit vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang n+1.

   $$U^{n+1} = U^n \times M = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} 0,6(75 + 75 \times 0,2^n) + 0,4(75 - 75 \times 0,2^n) & 0,4(75 + 75 \times 0,2^n) + 0,6(75 - 75 \times 0,2^n) \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} 45 + 45 \times 0,2^n + 30 - 30 \times 0,2^n & 30 + 30 \times 0,2^n + 45 - 45 \times 0,2^n \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} 75 + 15 \times 0,2^n & 75 - 15 \times 0,2^n \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2 \times 0,2^n \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^{n+1} & 75 - 75 \times 0,2^{n+1} \end{pmatrix}$$

   Donc la propriété est vraie au rang n+1.

   — conclusion : la propriété a été initialisée et est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}$

5. Comme $-1 < 0,2 < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,2^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 75$

A long terme les deux programmes compteront 75 inscrits

Partie B

1. a. $S = 1+1+8+3\times(1+3) = 22$ et $22 = 10\times 2+2$ donc la clé associée au cinq premiers chiffres est 2 et non 3

   Le numéro indiqué ne peut donc pas avoir été attribué à un enfant de l'association

   b. Soit S_1 et S_2 les sommes associées à ces deux numéros

   $S_1 = c_3+c_5+3\times(8+c_4) = c_3+3c_4+c_5+24$ et $S_2 = 1+c_3+c_5+3\times(1+c_4) = c_3+3c_4+c_5+4 = S_1+20$

   On a donc $S_2 \equiv S_1 \pmod{10}$ donc les clés associées à ces deux séries de cinq chiffres sont les mêmes

   L'erreur ne sera donc pas détectée

2. a. Soit S la somme avant l'inversion et S′ la somme après l'inversion.
   $S = c_1+c_3+c_5+a\times(c_2+c_4)$ et $S' = c_1+c_4+c_5+a\times(c_2+c_3)$
   La clé ne détecte pas l'erreur si et seulement si $S \equiv S' \pmod{10}$ soit $S - S' \equiv 0 \pmod{10}$

   $c_3 - c_4 + a(c_4 - c_3) \equiv 0 \pmod{10}$

   $(a-1)(c_4 - c_3) \equiv 0 \pmod{10}$

   b. Le tableau suivant donne les restes de la division de np par 10, et donne ainsi tous les couples $(n\ ,\ p)$ vérifiant $np \equiv 0\ (10)$:

p \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

   Pour tout $n \in \{0\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 8\}$, il existe au moins un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \quad (10)$

   c. D'après le tableau précédent, les valeurs $a-1$ permettant la détection systématique sont 1 ou 3 ou 7

   Donc les valeurs de a permettant la détection de l'inversion entre c_3 et c_4 sont 2 ou 4 ou 8