Exercice 1 (5 pts)

Dans un repère du plan (O, I, J) on donne A(1 ; 3) et B(2 ; 4) et (d) la droite d'équation : $4x - y + 5 = 0$.

1. $\overrightarrow{AB}(1\,;\,1)$ est un vecteur directeur de (AB)

   On en déduit que $-b = 1$ soit $b = -1$ et que $a = 1$

   Une équation de (AB) est de la forme : $x - y + c = 0$

   Comme $A \in$ (AB) alors $1 - 3 + c = 0$ soit $c = 2$

   (AB) a pour équation : $x - y + 2 = 0$

2. $\overrightarrow{u}(1\,;4)$ $\overrightarrow{v}(2\,;8)$

3. C $\in$ (d) donc $4x - 4 + 5 = 0$ soit $x = \frac{-1}{4}$

4. $\overrightarrow{AB}(1\,;\,1)$ est un vecteur directeur de (AB)

   $\overrightarrow{u}(1\,;4)$ est un vecteur directeur de d

   $xy' - x'y = 1 \times 4 - 1 = 3 \neq 0$

   $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et d ne sont pas parallèles

5. $\overrightarrow{u}(1\,;4)$ est aussi un vecteur directeur de d'

   On en déduit que $b = -1$ et que $a = 4$

   Une équation de (d') est de la forme : $4x - y + c = 0$

   Comme $D \in$ (d') alors $4 \times 2 - 7 + c = 0$ soit $c = -1$

   (d') a pour équation : $4x - y - 1 = 0$

Exercice 2 (5 pts)

Dans un triangle ABC on considère les points E, F et G définis par : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AF} = \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BG} = \dfrac{-1}{8}\,\overrightarrow{BC}$.

1. On conjecture que les points E,F,G sont alignés

2. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \dfrac{-1}{4}\,\overrightarrow{AC} + \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{AC}$

3. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \dfrac{-1}{4}\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{8}\,\overrightarrow{BC} = \dfrac{-1}{4}\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{8}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \dfrac{-1}{4}\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{8}\overrightarrow{BA} - \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AC} = \dfrac{-3}{8}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AB} = \dfrac{9}{8}\overrightarrow{AB} - \dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

4. On en déduit des 2 égalités précédentes que $\overrightarrow{EG} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{EF}$

   Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires donc les trois points E, F et G sont alignés.

Exercice 3 (5 pts)

Chaque affirmation est-elle vraie ou fausse. Toute réponse non justifiée n'apporte aucun point.

1. $\overrightarrow{v}(3\,;\,2)$ est un vecteur directeur de (d)
   $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc $\overrightarrow{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (d)

   FAUX

2. Vérifions si A et B appartiennent à cette doite

   pour le point A : $8 \times 2 - 4 \times 3 - 4 = 0$ donc A $\in$ (d)

   pour le point B : $8 \times 4 - 4 \times 7 - 4 = 0$ donc B $\in$ (d)

   Les 2 points A et B appartiennent à cette droite

   VRAI

3. $5 \times 2 + 3 \times (-3) - 2 = -1 \neq 0$ donc A $\notin$ (d)

   FAUX

4. $\overrightarrow{BC}$(-3 ; 0)

   Comme $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BC}$

   $x_A - 4 = 2 \times (-3)$ soit $x_A = -6 + 4 = -2$

   $y_A - 3 = 2 \times 0$ soit $y_A = 3$

   Donc A(-2 ; 3)

   $\overrightarrow{AE}(\frac{8}{3}\,;\,\frac{-8}{3})$ $\overrightarrow{AD}$(4 ; -4)

   $xy' - x'y = \dfrac{8}{3} \times (-4) + \dfrac{8}{3} \times 4 = 0$

   Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires donc les trois points A, E et D sont alignés.

   VRAI

5. $\overrightarrow{AB}$(3 ; 9) $\overrightarrow{CD}$(-1 ; $y - 3$)

   $xy' - x'y = 0$

   $3(y - 3) + 9 = 0$

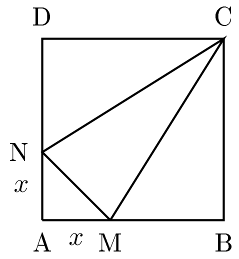
   $3y = 0$

   $y = 0$

   VRAI

Exercice 4 (5 pts)

ABCD est un carré de côté 6 cm. M est un point de [AB] et N est le point de [AD] tel que AN = AM. On note x la longueur AM exprimée en cm et $f(x)$ l'aire du triangle CMN exprimée en cm^2.



1. AM $\leqslant$ AB donc $x \leqslant 6$

   De plus une longueur est positive donc $x \in [0\,;\,6]$

2. Aire de AMN $= \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{x^2}{2}$

   Aire de CMB $= \dfrac{(6-x)\times 6}{2} = 18 - 3x$

   Aire de CDN $= \dfrac{(6-x)\times 6}{2} = 18 - 3x$

   $f(x)$=aire de ABCD -(aire de AMN + aire de CMB +aire de CDN) $= 36 - (\frac{x^2}{2} 18 - 3x + 18 - 3x) = -\dfrac{x^2}{2} + 6x$

3. $\alpha = \dfrac{-\,b}{2a} = 6$

   $\beta = f(6) = 18$

   Comme $a > 0$ alors

x	0	3
variations de f	0 ↗	18

4. L'aire maximale de f sur $[0\,;\,6]$ est 18 cm^2

5. On résout l'inéquation $f(x) > 9$

   $-\dfrac{x^2}{2} + 6x - 9 > 0$

   $\Delta = 18 \quad x_1 = 6 + 3\sqrt{2} \notin [0\,;\,6\,] \quad$ et $\quad x_2 = 6 - 3\sqrt{2}$

x	0		$6-3\sqrt{2}$		6
$-\frac{x^2}{2} + 6x - 9$		$-$	0	$+$	

   Il faut que $x \in \left]6 - 3\sqrt{2}\,;6\right]$