BACCALAUREAT BLANC

Série S

MATHEMATIQUES SPECIFIQUE

Coefficient 7

Durée 4 heures

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 pts)

Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.
La chaîne A produit 40 % des composants et la chaîne B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5 %.

On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
On note :

A l'évènement « le composant provient de la chaîne A »

B l'évènement « le composant provient de la chaîne B »

S l'évènement « le composant est sans défaut »

1. Montrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0,89$.
2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

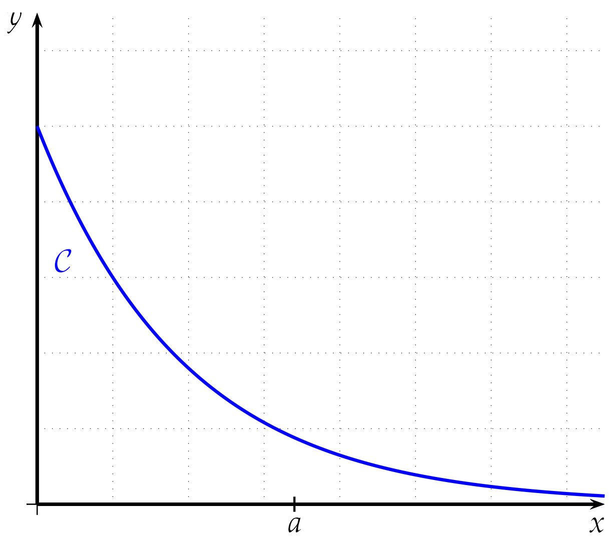
Partie B

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).
On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T. On rappelle que :

— pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

— pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, $p(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$.

1. La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



   a. Interpréter graphiquement $P(T \leqslant a)$ où $a > 0$.

   b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$: $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

   c. En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$.

2. On suppose que $P(T \leqslant 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.
   a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
   Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.
   b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
   Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.
   c. Donner l'espérance mathématique E(T) de la variable aléatoire T à l'unité près.
   Interpréter ce résultat.

EXERCICE 2 (5 pts)

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Proposition 1
L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2i|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe $3i$.

Proposition 2
Soit (E) l'équation $(z-1)(z^2-8z+25)=0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3
$\dfrac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $(-\sqrt{3}+i)^8$.

Question 4
On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe $4i$ et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+i)^n$.

1. Ecrire le nombre $1+i$ sous forme exponentielle.
2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.

Exercice 3 (5 pts)

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. a. Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
   On précisera en particulier ce que représente u_n.
   b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
   c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
   Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que .... faire
	    u prend la valeur ....
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher ....

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1\,000$.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B : second modèle – avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. a. Calculer $f(0)$.
   b. Démontrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) < 50$.
   c. Étudier le sens de variation de la fonction f.
   d. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.
3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
   Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.
   En déduire la réponse au problème.

EXERCICE 4 (5 pts)

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$v_1(t) = 5 \times \frac{\mathrm{e}^{0,3t} - 1}{\mathrm{e}^{0,3t} + 1}.$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction v_1.
2. On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement. On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en m.s^{-1}) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.
   On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s^{-1}.
   Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.
On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en m.s^{-1}), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$v_2(t) = 32,7\left(1 - \mathrm{e}^{-0,3t}\right).$$

1. Quelle est la vitesse, exprimée en m.s^{-1}, atteinte par le colis au bout de 10 secondes ? Arrondir à 0,1 m.s^{-1}.
2. Résoudre l'équation $v_2(t) = 30$ m.s^{-1}. Donner une interprétation concrète de la solution de cette équation dans le cadre de cet exercice.
3. On sait que la chute du colis dure 20 secondes.
   On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :
   $$d(\mathrm{T}) = \int_0^{\mathrm{T}} v_2(t)\,\mathrm{d}t.$$
   a. Montrer que, pour tout réel T de l'intervalle $[0\,;\,20]$,
   $d(\mathrm{T}) = 109\left(\mathrm{e}^{-0,3\mathrm{T}} + 0,3\mathrm{T} - 1\right)$.
   b. Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol.
4. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,1 s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.

EXERCICE 5 (5 pts)

Partie A

On considère les matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres entiers.

Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de M. On le note det(M).
Ainsi $\det(M) = 3a - 5b$.

1. Dans cette question on suppose que $\det(M) \neq 0$ et on pose $N = \dfrac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$.
   Justifier que N est l'inverse de M.
2. On considère l'équation (E) : $\det(M) = 3$.
   On souhaite déterminer tous les couples d'entiers $(a\ ;\ b)$ solutions de l'équation (E).
   a. Vérifier que le couple $(6\ ;\ 3)$ est une solution de (E).
   b. Montrer que le couple d'entiers $(a\ ;\ b)$ est solution de (E) si et seulement si $3(a-6) = 5(b-3)$.
   En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Partie B

1. On pose $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
   En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de Q.
2. *Codage avec la matrice* Q

   Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ on utilise la procédure ci-après :

   Etape 1 : On associe au mot la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 est l'entier correspondant à la première lettre du mot et x_2 l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

   Etape 2 : La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que

   $Y = QX$.

   Etape 3 : La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ telle que r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

   Etape 4 : A la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape 1.

$$\text{Exemple : JE} \to X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 57 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \to \text{OF}.$$

   Le mot JE est codé en le mot OF.
   Coder le mot DO.

3. *Procédure de décodage*

   On conserve les mêmes notations que pour le codage.

   Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que Y = QX.

   a. Démontrer que 3X = 3Q^{-1}Y puis que $\left\{\begin{array}{l c r l} 3x_1 & = & 3r_1 - 3r_2 & [26] \\ 3x_2 & = & -5r_1 + 6r_2 & [26] \end{array}\right.$

   b. En remarquant que $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$, montrer que $\left\{\begin{array}{l c r l} x_1 & \equiv & r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 & \equiv & 7r_1 + 2r_2 & [26] \end{array}\right.$

   c. Décoder le mot SG.