<u>EXERCICE 1</u>

Partie A

1. $f(-x) = -\dfrac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{-x}{b}} + \mathrm{e}^{-\frac{-x}{b}}\right) + \dfrac{9}{4} = -\dfrac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right) + \dfrac{9}{4} = f(x)$

   On en déduit que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

2. $f'(x) = -\dfrac{b}{8}\left(\frac{1}{b}\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} - \frac{1}{b}\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right) = -\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} + \dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}} = -\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right)$

3. Pour étudier le signe de $f'(x)$ on résout l'inéquation : $\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}} > 0$

   $\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}} > 0$

   $\frac{x}{b} > -\frac{x}{b}$

   $2\frac{x}{b} > 0$

   $x > 0$

   f' est du signe opposé à celui de $\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}$

x	-2		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$f(-2)$	$\nearrow$	$\dfrac{9-b}{4}$	$\searrow$	$f(2)$

   On en déduit les coordonnées du sommet $\mathrm{S}\left(0\ ;\ \dfrac{9-b}{4}\right)$

Partie B

1. S est à 2 m du sol d'où $\dfrac{9-b}{4} = 2$

   $9 - b = 8$

   soit $b = 1$

2. $f(0) = 2$ et $f(2) = -\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{2}\right) + \dfrac{9}{4} \approx 1,31$

   Sur $[0\ ;\ 2]$, f est continue et strictement décroissante. De plus $f(0) > 1,5$ et $f(2) < 1,5$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ 2]$

   $a \approx 1,76$

3. L'aire d'un vantail est donné par $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ et l'unité d'aire est de 1 m^2

   $\displaystyle\int_0^{1,8} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1,8} -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{9}{4}\,\mathrm{d}x$

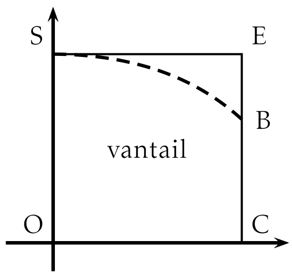
   $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{x} - e^{-x}\right) + \dfrac{9}{4}x$

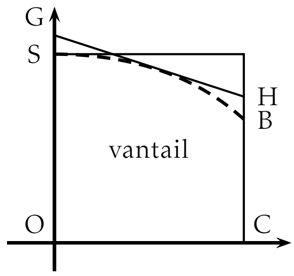
$\displaystyle\int_0^{1,8} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(1,8)-\mathrm{F}(0) = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{1,8} - e^{-1,8}\right) + 0,405 + \frac{1}{8}(1-1) \approx 3,3$

Donc un vantail pèse environ $20\times 3,3 = 66$ kg. Le client va donc décider de motoriser son portail

Partie C

$a = 1,8$ et $b = 1$.





Forme 1 : découpe dans un rectangle   Forme 2 : découpe dans un trapèze

L'aire du rectangle OCES est $\mathrm{OS}\times\mathrm{OC} = 2a = 3,6\ \mathrm{m}^2$

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1)+f(1)$

Pour calculer OG on remplace dans l'équation de la tangente x par 0

$\mathrm{OG} = -f'(1)+f(1) \approx 2,158$

Pour calculer HC on remplace dans l'équation de la tangente x par $a = 1,8$

$\mathrm{HC} = 0,8f'(1)+f(1) \approx 1,629$

L'aire du trapèze est donc $\dfrac{\mathrm{HC}+\mathrm{OG}}{2}\times\mathrm{OC} \approx \dfrac{3,787}{2}\times 1,8 \approx 3,41\ \mathrm{m}^2$

L'économie avec la formule 2 serait donc d'environ 0,2 m^2 par vantail soit 0,4 m^2 pour le portail

Exercice 2

$v(t) = 9,81\dfrac{m}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$

Partie A - Cas général

1. $v'(t) = 9,81\dfrac{m}{k}\times\left(0-\dfrac{-k}{m}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right) = 9,81\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} > 0$

   La vitesse est donc croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

2. Puisque la vitesse de la goutte est croissante, elle augmente au cours de sa chute donc la goutte ne ralentit pas

3. $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} = \lim\limits_{\mathrm{X}\to-\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{X}} = 0$

   $\lim\limits_{t\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}) = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 9,81\dfrac{m}{k}$

4. On calcule $v\left(5\frac{m}{k}\right) = 9,81\dfrac{m}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}\times 5\frac{m}{k}}\right) = 9,81\dfrac{m}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-5}\right)$

   $\dfrac{v}{\mathrm{V}} = \dfrac{9,81\dfrac{m}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-5}\right)}{9,81\frac{m}{k}} = 1-\mathrm{e}^{-5}\approx 0,993$

   Cette vitesse dépasse 99 % de la vitesse limite, l'affirmation est correcte

Partie B

Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3,9$.
A un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-l}.

1. $v(t) = 9,81 \times \dfrac{6}{3,9}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3,9}{6}t}\right)$

   On résout : $9,81 \times \dfrac{6}{3,9}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3,9}{6}t}\right) = 15$

   $1 - \mathrm{e}^{-\frac{3,9}{6}t} = \dfrac{15}{9,81} \times \dfrac{3,9}{6} = \dfrac{325}{327}$

   $\mathrm{e}^{-\frac{3,9}{6}t} = 1 - \dfrac{325}{327} = \dfrac{2}{327}$

   $-\dfrac{3,9}{6}t = \ln\left(\dfrac{2}{327}\right)$

   $t = -\dfrac{6}{3,9}\ln\left(\dfrac{2}{327}\right) \approx 7,84$

   La vitesse atteint 15 m.s^{-1} au bout de $\mathrm{T} = 7,8$ s environ

2. La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

   La vitesse moyenne demandée est donc :

   $\mathrm{V} = \dfrac{1}{\mathrm{T} - 0}\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{7,8} \times 9,81 \times \dfrac{20}{13}\displaystyle\int_0^{7,8} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{13}{20}t}\,\mathrm{d}t$

   $\mathrm{F}(t) = t + \dfrac{20}{13}\mathrm{e}^{-\frac{13}{20}t}$

   $\mathrm{V} = \dfrac{327}{169}\left(7,8\dfrac{20}{13}\mathrm{e}^{-5,07} - \dfrac{20}{13}\right) \approx 12,1$

   La vitesse moyenne de la goutte est d'environ 12,1 m.s^{-1}