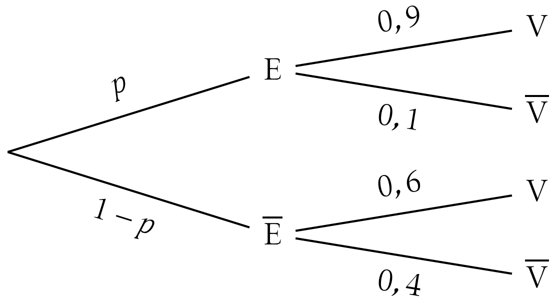
Exercice 1 (7 pts)

1. Arbre pondéré :



2. $P(V) = P(E \cap V) + P(\overline{E} \cap V) = p \times 0,9 + (1-p) \times 0,6 = 0,9p + 0,6 - 0,6p = 0,3p + 0,6$

3. a. On a $P(V) = 0,675$

   $0,3p + 0,6 = 0,675$

   $0,3p = 0,075$

   $p = \dfrac{0,075}{0,3} = 0,25$

   b. $P_V(E) = \dfrac{P(V \cap E)}{P(V)} = \dfrac{p \times 0,9}{0,675} = \dfrac{0,25 \times 0,9}{0,675} = \dfrac{0,225}{0,675} = \dfrac{1}{3}$

Partie B

1. Plus l'écart-type est petit, plus la courbe est resserrée autour de l'espérance. Donc la courbe ayant pour espérance 14 et pour écart-type 1 correspond au trajet en vélo.
   $\mu_V = 14$ et donc $\mu_C = 16$

2. $P(10 \leqslant T_V \leqslant 15) \approx 0,8413$

3. - $P(T_V \leqslant 15) \approx 0,8413$

   - $P(T_C \leqslant 15) \approx 0,3694$

   Donc $P(T_V \leqslant 15) > P(T_C \leqslant 15)$ donc il vaut mieux privilégier le vélo si Romane souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail

Partie C

1. La fonction f a pour primitive la fonction F définie par $F(t) = -e^{-\lambda t}$

   $P(X \leqslant b) = \displaystyle\int_0^b f(t)\,dt$

   $P(X \leqslant b) = F(b) - F(0) = -e^{-\lambda b} + 1 = 1 - e^{\lambda b}$

2. On sait que la probabilité que l'ampoule fonctionne encore après 50 heures d'utilisation est 0,9.

   a. $P(D \geqslant 50) = 0,9$

      $e^{-50\lambda} = 0,9$

      $-50\lambda = \ln 0,9$

      $\lambda = \dfrac{-\ln(0,9)}{50}$

   b. La loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement donc

      $P_{(X \geqslant 200)}(X \geqslant 250) = P(X \geqslant 50) = 0,9$

Exercice 2 (3 pts)

1. (E) : $z^2 - 6z + c = 0$

   a. $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4c$

      Comme $c > 9$ alors $\Delta < 0$ et l'équation (E) admet deux solutions complexes non réelles

   b. $z_1 = \dfrac{6 + i\sqrt{4c - 36}}{2} = \dfrac{6 + 2i\sqrt{c - 9}}{2} = 3 + i\sqrt{c - 9} = z_A$

      $z_2 = \overline{z_1} = \overline{z_A} = z_B$

2. $OB = |z_B| = |\overline{z_A}| = |z_A| = OA$

   OAB est donc bien isocèle en O

3. $AB^2 = |z_B - z_A|^2 = \left|2i\sqrt{c - 9}\right|^2 = 4(c - 9) = 4c - 36$

   $OA^2 = |z_A - z_O|^2 = \left|3 + i\sqrt{c - 9}\right|^2 = 9 + c - 9 = c$

   OAB est rectangle si et seulement si $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 2OA^2$

   soit $4c - 36 = 2c$

   $2c = 36$

   $c = 18$

Exercice 3 (5 pts)

Partie A : étude d'un cas particulier

1. $C(t)=12\left(1-e^{-\frac{7}{80}t}\right)$

   $C'(t)=12\left(0-\left(-\frac{7}{80}\right)e^{-\frac{7}{80}t}\right)=\frac{21}{20}\,e^{-\frac{7}{80}t}>0$

   donc la fonction C est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{7}{80}t}=\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$

   donc $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)=12<15$

   Le plateau devrait être égal à 15 or il n'est que de 12 donc le traitement n'est pas adapté

Partie B : étude de fonctions

1. $f'(x)=-\frac{105}{x^2}\times\left(1-e^{-\frac{3}{40}x}\right)+\frac{105}{x}\times\left(0-\left(-\frac{3}{40}\,e^{-\frac{3}{40}x}\right)\right)=\frac{105}{x^2}\left(-1+e^{-\frac{3}{40}x}+\frac{3x}{40}\,e^{\frac{3}{40}}\right)=\frac{105\,g(x)}{x^2}$

2. $f'(x)=\frac{105\,g(x)}{x^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

   D'après le tableau de variation de la fonction g, $g(x)<0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc $f'(x)<0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ et donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

3. f est continue et strictement décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$. De plus $f(1)=105\left(1-e^{-\frac{3}{40}}\right)\approx 7,59$ à $f(80)=\frac{105}{80}\left(1-e^{-6}\right)\approx 1,31$.

   Comme $5,9\in[1,31\ ;\ 7,59]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $\alpha\in[1\ ;\ 80]$, tel que $f(\alpha)=5,9$.

   Sur $]0\ ;\ 1]$ le minimum de f est $f(1)\approx 7,59$ donc sur cet intervalle l'équation $f(x)=5,9$ n'admet pas de solution.

   En résumé l'équation $f(x)=5,9$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$

   La calculatrice donne $\alpha\approx 8,1$

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

1. a. $C(t)=\frac{105}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{80}t}\right)$

      $C(6)=\frac{105}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{80}\times 6}\right)=\frac{105}{a}\left(1-e^{-\frac{3}{40}a}\right)=f(a)$

   b. On veut résoudre l'équation $f(a)=5,9$

      D'après la partie B, $a=\alpha\approx 8,1$

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)=\frac{d}{a}$

   On veut donc $\frac{d}{a}=15$

soit $d = 15 \times 8,1 = 121,5$

Pour un débit de 121,5 micromoles par heure, le traitement du patient est efficace

EXERCICE 4 (5 pts)

Partie A : un premier modèle

1. Augmenter de 5%, revient à multiplier par $1,05$

   La suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0 = 12$ et de raison $q = 1,05$

   $v_n = v_0 \times q^n = 12 \times 1,05^n$

2. Il faut regarder si ce modèle permet de limiter la population à 60 000 individus, autrement dit chercher n tel que $v_n > 60$

   On résout l'inéquation : $v_n > 60$

   $12 \times 1,05^n > 60$

   $1,05^n > 5$

   $n \ln 1,05 > \ln(5)$

   $n > \dfrac{\ln(5)}{\ln(1,05)} \approx 32,99$

   Donc pour $n = 33$ c'est-à-dire en 2049, la population dépassera 60 000 individus

   Ce modèle ne répond donc pas aux contraintes du milieu naturel

Partie B : un second modèle

1. a. $g(x) = -\dfrac{1,1}{605}x^2 + 1,1x$

   $g'(x) = -\dfrac{1,1}{605} \times 2x + 1,1 = -\dfrac{2,2}{605}x + 1,1$ (fonction affine)

   $g'(x) = 0$

   $-\dfrac{2,2}{605}x + 1,1 = 0$

   $-\dfrac{2,2}{605}x = -1,1$

   $x = \dfrac{1,1}{\frac{2,2}{605}} = 302,5$

x	$-\infty$		$302{,}5$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	$g(302{,}5)$	$\searrow$	

Donc g est croissante sur $[0\,;\,60]$

b. $g(x) = x$

$-\dfrac{1,1}{605}x^2 + 1,1x = x$

$-\dfrac{1,1}{605}x^2 + 0,1x = 0$

$x\left(-\dfrac{1,1}{605}x + 0,1\right) = 0$

$x = 0 \quad \text{ou} \quad -\dfrac{1,1}{605}x + 0,1 = 0$

$x = 0 \quad \text{ou} \quad 0,1 = \dfrac{1,1}{605}x$

$x = 0 \quad \text{ou} \quad 0,1 \times \dfrac{605}{1,1} = x$

$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 55$

2. a. $u_1 = g(u_0) = g(12) \approx 12,938$

Avec ce modèle, on peut estimer la population à 12 938 individus en 2017

b. — **Initialisation**
Pour $n = 0$, $u_0 = 12$ et $0 \leqslant 12 \leqslant 55$ donc la propriété est vraie au rang 0.

— **Hérédité**
On suppose que le propriété est vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_n \leqslant 55$ et on veut démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$

$0 \leqslant u_n \leqslant 55$

$g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(55)$ (la fonction g est croissante sur $[0\,;\,60\,]$)

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 55$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$

— **Conclusion**
La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$

c. $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n - u_n = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 0,1u_n$

$= u_n\left(-\dfrac{1,1}{605}u_n + 0,1\right)$

$= u_n \times \dfrac{1,1}{605}\left(-u_n + 0,1 \times \dfrac{605}{1,1}\right)$

$= \dfrac{1,1}{605}u_n(55 - u_n)$

On sait que $0 \leqslant u_n \leqslant 55$ donc $55 - u_n \geqslant 0$ donc $\dfrac{1,1}{605}u_n(55-u_n) \geqslant 0$

Donc la suite (u_n) est croissante

d. La suite (u_n) est croissante et majorée par 55 donc elle converge

e. L'équation $g(x) = x$ a 2 solutions : 0 et 55

La suite (u_n) est croissante et $u_0 = 12$ donc la limite ℓ de la suite est 55

Ce qui signifie que la population va tendre vers 55 000

3. Algorithme

Variables	n un entier naturel
	u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0 u prend la valeur 12 **Tant Que** $u < 50$ u prend la valeur $1,1u - \frac{1,1}{605}u^2$ n prend la valeur $n+1$ **Fin Tant Que**
Sortie	Afficher n

Exercice 5 (5 pts SPE)

Partie A

1. Algorithme

```
Variables :  X est un nombre entier
             Y est un nombre entier
Début :      Pour X variant de −5 à 10
                 Pour Y variant de −5 à 10
                     Si 7X − 3Y = 1
                         Alors Afficher X et Y
                     Fin Si
                 Fin Pour
             Fin Pour
Fin
```

2. a. Le couple $(1,2)$ est une solution particulière de (E) car $7 \times 1 - 3 \times 2 = 1$

b. $7x-3y=7\times 1-3\times 2$

$7(x-1)=3(y-2)$

Ainsi 3 divise $7(x-1)$, or 3 et 7 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $x-1$.

Il existe donc un entier relatif k tel que $x-1=3k$

$x=1+3k$

On obtient alors $7\times 3k=3(y-2)$ d'où $y=2+7k$

Réciproquement, on vérifie aisément que les couples du type $(1+3k\ ;\ 2+7k)$ avec k entier relatif sont bien solutions de (E)

c. On cherche k tel que $-5\leqslant 1+3k\leqslant 10$

$-6\leqslant 3k\leqslant 9$

$-2\leqslant k\leqslant 3$

Pour $k=-2$ $\quad x=-5$ et $y=-12$ (ne convient pas)
Pour $k=-1$ $\quad x=-2$ et $y=-5$ (convient)
Pour $k=0$ $\quad x=1$ et $y=2$ (convient)
Pour $k=1$ $\quad x=4$ et $y=9$ (convient)
Pour $k=2$ $\quad x=7$ et $y=16$ (ne convient pas)
Pour $k=3$ $\quad x=10$ et $y=23$ (ne convient pas)

Il n'y a donc que trois couples vérifiant les conditions demandées : (-2, 5) (1, 2) (4, 9)

Partie B

1. a. $MX_n=\begin{pmatrix}-\frac{13}{2} & 3\\ -\frac{35}{2} & 8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{13}{2}x_n+3y_n\\ -\frac{35}{2}x_n+8y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=X_{n+1}$

b. $X_n=M^nX_0$

2. a. $P^{-1}MP=\begin{pmatrix}7 & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{13}{2} & 3\\ -\frac{15}{2} & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -3\\ -5 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

b. $D^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2^n}\end{pmatrix}$

c. — **Initialisation.** On a $M^0=I_3$ (où I_3 est la matrice identité d'ordre 3),

et $PD^0P^{-1}=PI_3P^{-1}=PP^{-1}=I_3$ donc a propriété est donc vraie pour $n=0$

— **Hérédité.** On suppose que le propriété est vraie au rang $n\geqslant 0$ et on veut démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$

$$\mathrm{M}^{n+1}=\mathrm{M}^n\times\mathrm{M}=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}\times\mathrm{PDP}^{-1}=\mathrm{PD}^n\times\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}\times\mathrm{DP}^{-1}=\mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$

— **Conclusion.**
La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc pour tout entier n, on a $\mathrm{M}^n=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$

3. $\mathrm{X}_n=\mathrm{M}^n\mathrm{X}_0=\begin{pmatrix}-14+\frac{15}{2^n} & 6-\frac{6}{2^n}\\ -35+\frac{35}{2^n} & 15-\frac{14}{2^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14+\frac{15}{2^n}+12-\frac{12}{2^n}\\ -35+\frac{35}{2^n}+30-\frac{28}{2^n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+\frac{3}{2^n}\\ -5+\frac{7}{2^n}\end{pmatrix}$

   On a donc, pour tout tout entier naturel n, $x_n=-2+\frac{3}{2^n}$ et $y_n=-5+\frac{7}{2^n}$

4. $7\left(-2+\frac{3}{2^n}\right)-3\left(-5+\frac{7}{2^n}\right)-1=-14+\frac{21}{2^n}+15-\frac{21}{2^n}-1=-15+15=0$

   ce qui prouve bien que A_n appartient à la droite $\mathcal{D}$