

BACCALAUREAT BLANC

Série S

MATHEMATIQUES SPECIFIQUE

Coefficient 7

Durée 4 heures

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (7 pts)

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

Partie A

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.

Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.

La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p .

Pour une journée donnée, on note :

- E l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- V l'évènement « Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est

$$P(V) = 0,3p + 0,6.$$

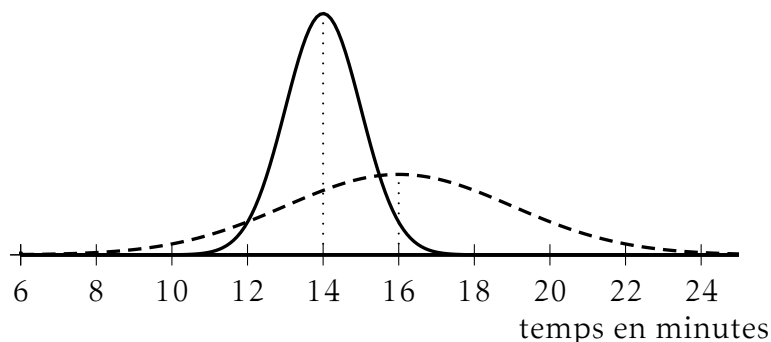
3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.
 - a. Calculer la valeur de p .
 - b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.

Partie B

Lorsque Romane se déplace en vélo, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, entre son domicile et son lieu de travail par une variable aléatoire T_V suivant une loi normale d'espérance μ_V et d'écart-type 1 minute.

Lorsqu'elle effectue ce trajet en transports en commun, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T_C suivant une loi normale d'espérance μ_C et d'écart-type 3 minutes.

1. On nomme \mathcal{C}_C et \mathcal{C}_V les courbes représentatives des fonctions de densité des variables aléatoires T_V et T_C représentées dans la figure ci-dessous.
Déterminer, en justifiant votre réponse, μ_V et μ_C .



2. Calculer la probabilité que pour Romane un trajet domicile-travail en vélo dure entre 10 et 15 minutes. Arrondir la réponse à 10^{-4} .

3. Quel mode de déplacement Romane doit-elle privilégier si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail?

Partie C

En hiver, Romane roule en vélo de nuit. Son vélo est visible grâce à une ampoule dont la durée de fonctionnement en heures peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X , suivant une loi exponentielle de paramètre λ , réel strictement positif.

La fonction de densité associée est donc la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

1. Soit b un réel positif.

Démontrer, à l'aide d'une intégrale, que

$$P(X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}.$$

2. On sait que la probabilité que l'ampoule fonctionne encore après 50 heures d'utilisation est 0,9.
- En déduire la valeur exacte de λ .
 - Calculer la probabilité que la durée de fonctionnement de l'ampoule soit supérieure à 250 heures sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 200 heures.

EXERCICE 2 (3 pts)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1. On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 6z + c = 0$$

où c est un réel strictement supérieur à 9.

- Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.
 - Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.
2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B .
Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.
3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

EXERCICE 3 (5 pts)

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{80}t} \right)$$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C .

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.

Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = 12 \left(1 - e^{-\frac{7}{80}t} \right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0 ; +\infty[$.
2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x} \left(1 - e^{-\frac{3}{40}x} \right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40} e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f .

On ne demande pas les limites de la fonction f .

3. Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; 80]$.
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.

Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.

On rappelle que la fonction C est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{80}t} \right)$$

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.
 - a. Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
 - b. Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang; elle est égale à 5,9 micromole par litre.
Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.
2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

EXERCICE 4 (5 pts)

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an. L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016 + n$. On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n .
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$

- a. Justifier que g est croissante sur $[0; 60]$.
- b. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $g(x) = x$.
2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1 . Interpréter.
 - b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 55$.
 - c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - d. En déduire la convergence de la suite (u_n) .
 - e. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle. Il utilise l'algorithme suivant.

Variables	n un entier naturel
	u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0 u prend la valeur 12 Tant Que u prend la valeur n prend la valeur Fin Tant Que
Sortie	Afficher

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geq 50$.