Exercice 1 (5 pts)

Partie A

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$.

Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.

L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. $P(X < 3) = 1 - P(X \geqslant 3) = 1 - e^{-0,2\times 3} \approx 0,451$

2. On cherche t tel que $P(X < t) > 0,95$

   $1 - e^{-0,2t} > 0,95$

   $e^{-0,2t} < 0,05$

   $-0,2t < \ln 0,05$

   $t > \dfrac{-\ln 0,05}{0,2} \approx 14,98$

   Donc le temps minimum à attendre est de 15 minutes

3. L'espérance $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,2} = 5$ min

   Il s'écoule en moyenne 5 minutes entre deux apparitions d'étoiles filantes

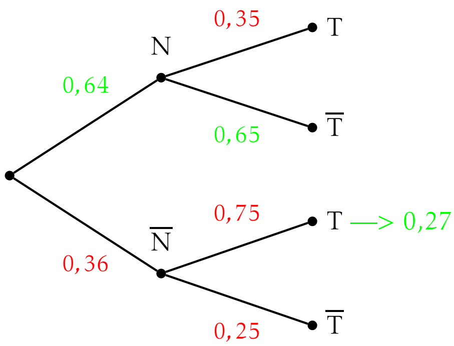
   Donc en deux heures on peut espérer voir en moyenne $\dfrac{120}{5} = 24$ étoiles filantes

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1. Arbre de probabilité



   $P(T) = P(N \cap T) + P\left(\overline{N} \cap T\right) = 0,64 \times 0,35 + 0,27 = 0,494$

2. $P_T(N) = \dfrac{P(T \cap N)}{P(T)} = \dfrac{0,224}{0,494} \approx 0,453$

Exercice 2 (9 pts)

1. $z^2 - 8z + 64 = 0$

   $\Delta = 64 - 4\times 64 = -192 < 0$

   $z_1 = \dfrac{8 + \mathrm{i}\sqrt{192}}{2} = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\mathrm{i}$.
   a. $|a| = \sqrt{4 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{64} = 8$

      On a $\cos\theta = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

   b. $a = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et b etant le conjugué de a alors $b = 8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

   c. $\mathrm{OA} = |a| = 8 \quad \mathrm{OB} = |b| = 8 \quad \mathrm{OC} = |c| = 8$

      Donc les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O et de rayon 8

   d. Figure en fin d'exercice.

3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   a. $b' = be^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 8e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 8$

   b. $|a'| = |a| \times \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = 8 \times 1 = 8$

      $\arg(a') = \arg(a) + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.

4. a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].

      $r = \dfrac{a' + b}{2} = \dfrac{-4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3} + 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 0$

      $s = \dfrac{b' + c}{2} = \dfrac{8 + 8\mathrm{i}}{2} = 4 + 4\mathrm{i}$

   b. Il semble que RST soit un triangle équilatéral

      $\mathrm{RS} = |s - r| = |4 + 4\mathrm{i}| = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$

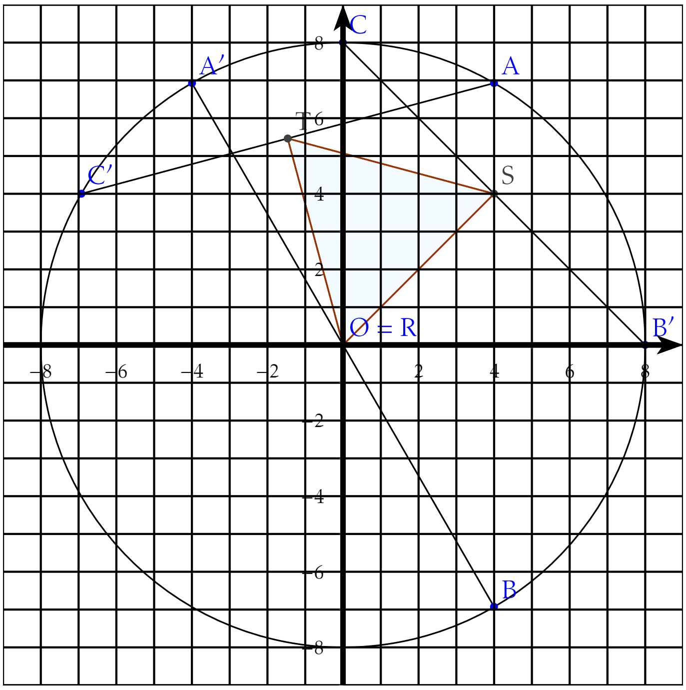
      $t = 2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$

      $\mathrm{ST} = |t - s| = \left|2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right) - 4 - 4\mathrm{i}\right| = \left|-2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(-2 + 2\sqrt{3}\right)\right|$

      $= \sqrt{(-2 - 2\sqrt{3})^2 + (-2 + 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 8\sqrt{3} + 12 + 4 - 8\sqrt{3} + 12} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

      $\mathrm{RT} = |t - r| = \left|2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right) - 0\right| = \sqrt{(2 - 2\sqrt{3})^2 + (2 + 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 - 8\sqrt{3} + 12 + 4 + 8\sqrt{3} + 12} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

      $\mathrm{RS} = \mathrm{ST} = \mathrm{RT} = 4\sqrt{2}$ donc le triangle RST est équilatéral



Exercice 3 (6 pts)

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$

   $\mathrm{F}(x) = \ln(1+x)$
   $u_0 = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

2. a. $u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$

   $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

   $\mathrm{F}(1) = \dfrac{1}{n+1}$ et $\mathrm{F}(0) = 0$

   Donc $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$

   b. Pour $n = 0$, $\quad u_1 + u_0 = \dfrac{1}{1} = 1 \quad$ donc $\quad u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln 2$

3. On a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

   Il semble que la suite (u_n) soit décroissante et converge vers zéro

4. a. $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

   Sur $[0\,;1]$ on a $x^n \geqslant 0$, $\; x-1 \leqslant 0 \;$ et $\; x+1 \geqslant 0 \;$ donc $\; \dfrac{x^n(x-1)}{1+x} \leqslant 0$

   L'intégrale d'une fonction négative est négative donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et la suite (u_n) est décroissante

   b. Sur $[0\,;1]$ on a $\dfrac{x^n}{1+x} \geqslant 0$

   L'intégrale d'une fonction positive est positive donc $u_n \geqslant 0$

   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge